Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Campus Tucuruí

Por: Belchior de Almeida Junior

Turma (T210-3ME). Equipe: Naticos

Progressão Geométrica

Definição:

Progressão geométrica (ou simplesmente PG) é uma seqüência de números não nulos em que cada um deles, **multiplicado** por um número fixo, fornece o próximo elemento da seqüência. Esse número fixo chama-se razão, e os elementos da seqüência são os termos da progressão geométrica.

Por exemplo, vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão 2, partindo do número 3.

$$3 \xrightarrow{x2} 6 \xrightarrow{x2} 12 \xrightarrow{x2} 24 \xrightarrow{x2} 48 \xrightarrow{x2} 96 \;\ldots\ldots$$

Observe como o crescimento é rápido. Os termos da progressão geométrica são representados, como em qualquer seqüência, por a1, a2, a3, ... , an, e a razão será representada pela letra q. Assim, no exemplo anterior, temos a1=3, a2=6, a3=12 etc. e q = 2.

Se cada termo da PG multiplicado pela razão dá o termo seguinte, então podemos afirmar que:

A razão **(q)** de uma P.G è qualquer termo dividido pelo termo anterior.

Verifique:

No exemplo dado acima a razão dada equivale a 2**.** Para provar que a razão dessa progressão geométrica Vale 2, podemos dividir um termo pelo seu anterior. Veja.

$$\frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{12}{6} = 2, \qquad \frac{96}{48} = 2$$

Pode-se perceber que qualquer termo dividido pelo seu anterior em uma P.G dará a mesma Razão.

Vamos classificar três progressões geométricas:

1. **Crescente**

   P.G: 3, 6, 12, 24, 48.... $\quad a_1 = 3, \quad q = 2$

2. **Decrescente**

   P.G: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ .... $\quad a_1 = 8, \quad q = \frac{1}{2}$

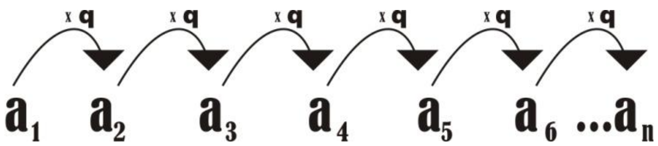
3. Estacionária

P.G: 4, 4, 4, 4, 4 ... $a_1 = 4,$ $q = 1$

Nota-se que:
Quando a razão é maior que 1 a P.G é crescente.
Quando a razão é menor que 1 a P.G é decrescente.
Quando a razão e igual a 1 a P.G é estacionária ou constante.

Fórmula do Termo Geral de uma P.G

Vamos agora obter uma fórmula para determinar qualquer termo de uma PG a partir do primeiro termo e da razão.
Observe a P.G a seguir:



A partir da definição de PG, temos que $a_2 = a_1 . q$. O terceiro termo é $a_3 = a_2 . q = a_1 . q . q = a_1 . q^2$. O quarto termo é $a_4 = a_3 . q = a_1 . q^2 . q = a_1 . q^3$ e assim por diante.

$$\mathbf{a_2 = a_1 . q}$$
$$\mathbf{a_3 = a_1 . q^2}$$
$$\mathbf{a_4 = a_1 . q^3}$$
$$\mathbf{a_5 = a_1 . q^4}$$

Para obter então o termo de ordem **n**, devemos multiplicar o primeiro termo pela razão n-1 vezes, ou seja,

Fórmula do Termo Geral:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

Onde:
a_n: é o número de termos da progressão geométrica.
A_1: é o primeiro termo da progressão geométrica.
q: é a razão da progressão geométrica.

1) Determine o 15º termo da progressão geométrica (256, 128, 64, ...).

Temos:

$$a_1 = 256,\ q = \frac{128}{256} = \frac{1}{2},\quad n = 15,\quad a_{15} = ??$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, para $n = 15$, obtemos:

$$a_{15} = a_1 . q^{15-1} \to a_{15} = a_1 . q^{14} \to a_{15} = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{14} \to a_{15} = 2^8 . \frac{1}{2^{14}} \to a_{15} = \frac{1}{2^6} \to a_{15} = \frac{1}{64}$$

2) Determine a razão da P.G. $(a_n)_{n \in IN^*}$ tal que: $a_1 = \frac{1}{3^{28}}$ e $a_{10} = \frac{1}{3^{10}}$.

$$a_1 = \frac{1}{3^{28}},\qquad a_{10} = \frac{1}{3^{10}},\qquad n = 10,\qquad q = ??$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 . q^{n-1}$, para $n = 10$, obtemos:

$$a_{10} = a_1 . q^{10-1} \to a_{10} = a_1 . q^9 \to \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^{28}} . q^9 \to \frac{3^{28}}{3^{10}} = q^9 \to$$
$$q^9 = 3^{18} \to q = \sqrt[9]{3^{18}} \to q = 3^2 \to q = 9$$

(Matemática. Autor: Manoel Paiva, 2005. Editora Moderna. Página 199 exercícios resolvidos 1 e 2)

3) Determinar o 12º termo da PG: (7, 14, 28, ...)

Como a razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior, temos que:

$$q = \frac{14}{7} = 2$$

Para calcular o 12º termo dessa progressão, substituímos n por 12 na fórmula do termo geral. Temos então:

$$a_{12} = a_1 . q^{11}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$a_{12} = 7 . 2^{11}$$
$$a_{12} = 7 . 2.048 = 14.336$$

4) Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada treponema pallidum): cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1 hora. Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

A população de bactérias forma uma progressão geométrica:

Momento inicial _ $a_1 = 1$
1 hora depois _ $a_2 = 8$
2 horas depois _ $a_3 = 64$

Vemos então que, 12 horas depois, devemos calcular o 13º termo da progressão geométrica com $a_1 = 1$ e $q = 8$. Aplicando novamente a fórmula do termo geral, com $n = 13$, temos:

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$a_{13} = 1 \cdot 8^{12}$$

Esse resultado dá o incrível número 68.719.476.736, ou seja, mais de 68 bilhões de bactérias!
(Fonte: apostila (Internet))

Propriedades da P.G.

Suponha inicialmente que os números a, b, c, formem uma progressão aritmética. Como a razão é igual a b - a e também igual a c - b temos:

$$b - a = c - b$$
$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Dizemos então que b é a média aritmética entre a e c. Agora, se os números positivos a, b, c formam uma progressão geométrica, então a razão é igual a b/a e também igual a c/b. Daí,

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = a.c \rightarrow b = \sqrt{a.c}}$$

Dizemos então, nesse caso, que b é média geométrica entre a e c. Observe duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, ambas com três termos.

PA: 4, 10, 16, _ 10 é média aritmética entre 4 e 16.
PG: 4, 08, 16, _ 08 é média geométrica entre 4 e 16.

Essa pequena informação pode ser útil para a resolução de alguns problemas. Veja.

Observe a seguinte P.G.

$$3 \quad a_2 \quad 12 \quad a_4 \quad 48 \quad ......$$

Através da formula da media aritmética é possível descobrir quais são os termos a_2 e a_3.

$$a_2 = \sqrt{a_1.a_3} \rightarrow a_2 = \sqrt{3.12} \rightarrow a_2 = \sqrt{36} \rightarrow a_2 = 6$$

O termo médio geométrico entre a_1 e a_3 equivale a 6.

$$a_4 = \sqrt{a_3.a_5} \rightarrow a_4 = \sqrt{12.48} \rightarrow a_4 = \sqrt{576} \rightarrow a_4 = 24$$

O termo médio geométrico entre a_3 e a_5 equivale a 24.

Somando os termos das Progressões Geométricas

Temos no caso geral a formula da soma dos **n** termos de uma progressão geométrica.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

1) Uma indústria iniciou suas atividades produzindo 5.000 objetos por ano e, a cada ano, a produção aumentou em 10% em relação ao ano anterior. Qual foi o total de objetos produzidos em 10 anos de atividade?

SOLUÇÃO: Repare que se, em um ano qualquer, a produção foi de x objetos, então, no ano seguinte, será de:

x + 10% de x =

$$\boldsymbol{= X + \frac{10}{100}.X =}$$

$$\boldsymbol{= X + 0,1.X =}$$

$$\boldsymbol{= X(1 + 0,1) =}$$

$$\boldsymbol{= X.\ 1.1 =}$$

Assim, se a produção em um ano é igual à do ano anterior multiplicada por 1,1, temos que as produções anuais formam uma progressão geométrica de razão 1,1.

$a_1 = 5.000$

$a_2 = 5.000 \,.\, 1,1$

$a_3 = 5.000 \,.\, 1,1^2$

.... etc.

Para calcular o número total de objetos produzidos em 10 anos, usamos nossa fórmula com a1 = 5.000, q = 1,1 e n = 10.

$$S = \frac{5000(1,1^{10} - 1)}{1,1 - 1}$$

O número 1,110 é calculado com auxílio da máquina de calcular, como mostramos anteriormente. Lembramos, ainda, que devemos fazer uma aproximação do resultado que vemos no visor, porque o número de casas decimais já é grande demais. Temos então:

$$S = \frac{5000(2,5937 - 1)}{1,1 - 1}$$

$$S = \frac{5000.1,5937}{1,1 - 1}$$

$$S = 79685$$

Essa indústria produziu, em 10 anos de atividade, aproximadamente 79.690 objetos. Repare que, no cálculo de 1,110, nossa aproximação foi para menos. Então, o número real de objetos produzidos foi, certamente, um pouco superior ao calculado. Portanto, o número 79.690 é uma estimativa, que sabemos estar próxima da realidade.

EXERCÍCIOS

1) Calcule a soma S = 1 + 2 + 4+ 8 + ... , com 10 parcelas.

2) Calcule a soma S = 2 + 10 + 50 + 250 + ... , com 8 parcelas.

3) Calcule a soma S = 1 + 1/3 + 1/9 + ..., com 6 parcelas

4) João ganhou em janeiro R$ 70,00 e, a partir daí, passou a ganhar um aumento de 10% todos os meses. Qual foi o total que ele ganhou em todo esse ano?

Sugestão: Considere a PG formada pelos salários de João:

$a_1 = 70$

$a_2 = 70 \,.\, 1,1$

$a_3 = 70 \,.\, 1,1^2$

....

Use a fórmula da soma para obter o resultado.

5) Uma loja de eletrodomésticos vende uma televisão de duas maneiras:
a) à vista por R$ 540,00;
b) pelo "plano maluco", no qual você paga prestações durante toda sua vida, sendo a primeira de R$ 256,00 e cada uma das outras igual à metade da anterior.
Qual delas você deve preferir?
Sugestão: Calcule o limite da soma das prestações do "plano maluco"