Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Campus Tucuruí

Por: Renato Martins e Jannine Cunha Gomes

Turma (T210-3ME). Equipe: Naticos

Binômio de Newton

Denomina-se Binômio de Newton , a todo binômio da forma $(a + b)^n$, sendo n um número natural .

Exemplo:
$B = (3x - 2y)^4$ (onde a = 3x, b = -2y e n = 4 [grau do binômio]).

Nota 1:
Isaac Newton - físico e matemático inglês(1642 - 1727).
Suas contribuições à Matemática, estão reunidas na monumental obra Principia Mathematica, escrita em 1687.

Exemplos de desenvolvimento de binômios de Newton :
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$
c) $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
d) $(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nota 2:
Não é necessário memorizar as fórmulas acima, já que elas possuem uma lei de formação bem definida, senão vejamos:

Vamos tomar por exemplo, o item (d) acima:
Observe que o expoente do primeiro e últimos termos são iguais ao expoente do binômio, ou seja, igual a **5**.
A partir do segundo termo, os coeficientes podem ser obtidos a partir da seguinte regra prática de fácil memorização:

Multiplicamos o coeficiente de a pelo seu expoente e dividimos o resultado pela ordem do termo. O resultado será o coeficiente do próximo termo. Assim por exemplo, para obter o coeficiente do terceiro termo do item (d) acima teríamos: 5.4 = 20; agora dividimos 20 pela ordem do termo anterior (2 por se tratar do segundo termo) 20:2 = 10 que é o coeficiente do terceiro termo procurado.

Observe que os expoentes da variável a decrescem de n até 0 e os expoentes de b crescem de 0 até n. Assim o terceiro termo é $10\,a^3b^2$ (observe que o expoente de a decresceu de 4 para 3 e o de b cresceu de 1 para 2).

Usando a regra prática acima, o desenvolvimento do binômio de Newton $(a + b)^7$ será:
$(a + b)^7 = a^7 + 7\,a^6b + 21\,a^5b^2 + 35\,a^4b^3 + 35\,a^3b^4 + 21\,a^2b^5 + 7\,ab^6 + b^7$

Como obtivemos, por exemplo, o coeficiente do 6º termo ($21\ a^2b^5$) **?**

Pela regra: coeficiente do termo anterior = 35. Multiplicamos 35 pelo expoente de a que é igual a 3 e dividimos o resultado pela ordem do termo que é 5.
Então, 35 . 3 = 105 e dividindo por 5 (ordem do termo anterior) vem 105:5 = 21, que é o coeficiente do sexto termo, conforme se vê acima.

Observações:
1) o desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$ é um polinômio.
2) o desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui n + 1 termos .
3) os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos , no desenvolvimento de $(a + b)^n$ são iguais .
4) a soma dos coeficientes de $(a + b)^n$ é igual a 2^n .

Fórmula do termo geral de um Binômio de Newton

Um termo genérico T_{p+1} do desenvolvimento de $(a+b)^n$, sendo p um número natural, é dado por

$$\boldsymbol{T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^p}$$

onde

$$\boldsymbol{\binom{n}{p} = c_{n.p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

é denominado Número Binomial e $\mathbf{C_{n.p}}$ é o número de combinações simples de **n** elementos, agrupados **p** a **p**, ou seja, o número de combinações simples de **n** elementos de taxa **p**. Este número é também conhecido como Número Combinatório.

Reveja o capítulo de Análise Combinatória

Exercícios Resolvidos:

1 - Determine o 7º termo do binômio $(2x + 1)^9$, desenvolvido segundo as potências decrescentes de x.

Solução:

Vamos aplicar a fórmula do termo geral de $(a + b)^n$, onde a = 2x , b = 1 e n = 9. Como queremos o sétimo termo, fazemos p = 6 na fórmula do termo geral e efetuamos os cálculos indicados. Temos então:
$T_{6+1} = T_7 = C_{9,6} . (2x)^{9-6} . (1)^6 = 9! /[(9-6)! . 6!] . (2x)^3 . 1 = 9.8.7.6! / 3.2.1.6! . 8x^3 = 84.8x^3 = 672x^3$.
Portanto o sétimo termo procurado é $672x^3$.

2 - Qual o termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

Solução:

Temos a = 2x , b = 3y e n = 8. Sabemos que o desenvolvimento do binômio terá 9 termos, porque

n = 8. Ora sendo T1 T2 T3 T4 **T5** T6 T7 T8 T9 os termos do desenvolvimento do binômio, o termo do meio (termo médio) será o **T5** (quinto termo). Logo, o nosso problema resume-se ao cálculo do T_5 . Para isto, basta fazer p = 4 na fórmula do termo geral e efetuar os cálculos decorrentes.
Teremos:
$T_{4+1} = T_5 = C_{8,4} . (2x)^{8-4} . (3y)^4 = 8! / [(8-4)! . 4!] . (2x)^4 . (3y)^4 = 8.7.6.5.4! / (4! . 4.3.2.1) . 16x^4.81y^4$

Fazendo as contas vem:
$T_5 = 70.16.81.x^4 . y^4 = 90720x^4y^4$, que é o termo médio procurado.

3 - Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtemos um polinômio de 16 termos . Qual o valor de n?

Solução:

Ora, se o desenvolvimento do binômio possui 16 termos, então o expoente do binômio é igual a 15. Logo, 3n = 15 de onde conclui-se que n = 5.

4 - Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de :

a) $(2x - 3y)^{12}$? Resp: 1

b) $(x - y)^{50}$? Resp: 0

Solução:

a) basta fazer x=1 e y=1. Logo, a soma S procurada será: $S = (2.1 -3.1)^{12} = (-1)^{12} = 1$
b) analogamente, fazendo x = 1 e y = 1, vem: $S = (1 - 1)^{50} = 0^{50} = 0$.D

5 - Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(x + 1/x)^6$.

Solução:

Sabemos que o termo independente de x é aquele que não depende de x, ou seja, aquele que não possui x.
Temos no problema dado: a = x , b = 1/x e n = 6.

Pela fórmula do termo geral, podemos escrever:

$T_{p+1} = C_{6,p} . x^{6-p} . (1/x)^p = C_{6,p} . x^{6-p} . x^{-p} = C_{6,p} . x^{6-2p}$.
Ora, para que o termo seja independente de x, o expoente desta variável deve ser zero, pois $x^0 = 1$. Logo, fazendo 6 - 2p = 0, obtemos p=3. Substituindo então p por 6, teremos o termo procurado. Temos então:
$T_{3+1} = T_4 = C_{6,3} . x^0 = C_{6,3} = 6! /[(6-3)! . 3!] = 6.5.4.3! / 3!.3.2.1 = 20$.
Logo, o termo independente de x é o T_4 (quarto termo) que é igual a 20.

Exercícios propostos

1) Qual é o termo em x^5 no desenvolvimento de $(x + 3)^8$?

2) Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x - 3y)^7$.

3) Qual é o valor do produto dos coeficientes do 2o. e do penúltimo termo do desenvolvimento de $(x - 1)^{80}$?

4) FGV-SP - Desenvolvendo-se a expressão $[(x + 1/x) . (x - 1/x)]^6$, obtém-se como termo independente de x o valor:
a) 10
b) -10
c) 20
d) -20
e) 36

5) UF. VIÇOSA - A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é 625. O valor de m é:
a) 5
b) 6
c)10
d) 3
e) 4

6) MACK-SP - Os 3 primeiros coeficientes no desenvolvimento de $(x^2 + 1/(2x))^n$ estão em progressão aritmética.O valor de n é:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

7) No desenvolvimento de $(3x + 13)^n$ há 13 termos. A soma dos coeficientes destes termos é igual a:

8 - UFBA-92 - Sabendo-se que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$ é igual a 256, calcule **(m/2)!**

9 - UFBA-88 - Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^2 + 1/x)^9$.

10 - Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(3x - 1)^{10}$.