Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Campus Tucuruí

Por: Belchior, Ismaigna e Jannine

Turma (T210-3ME). Equipe: Naticos

GEOMETRIA ESPACIAL

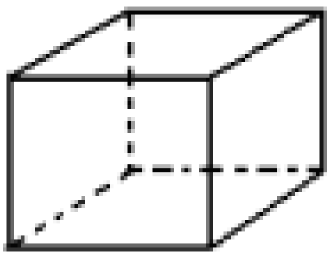
Relação de Euler

Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte:

$$V - A + F = 2$$

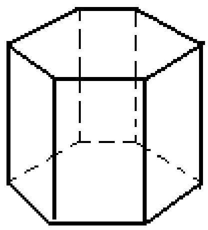
em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.

Observe os exemplos:



V=8 A=12 F=6

8 - 12 + 6 = 2



V = 12 A = 18 F = 8

12 - 18 + 8 = 2

Poliedros platônicos

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:

a) for convexo;

b) em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;

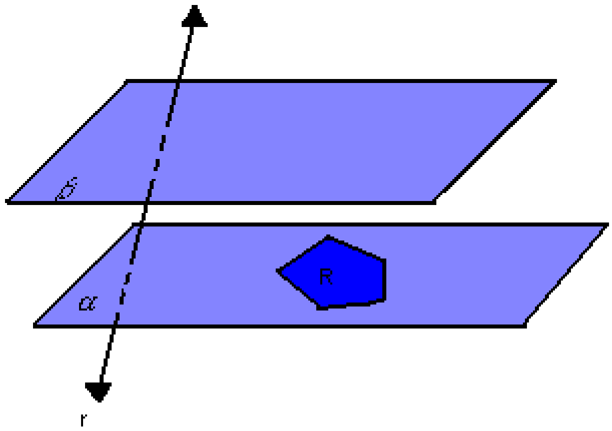
c) toda face tiver o mesmo número de arestas;

d) for válida a relação de Euler.

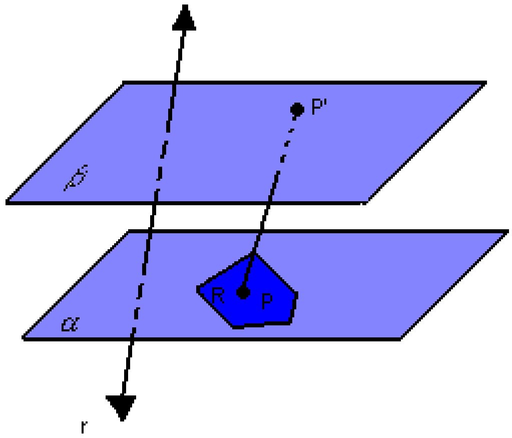
Assim, nas figuras acima, o primeiro poliedro é platônico e o segundo, não-platônico.

Prismas

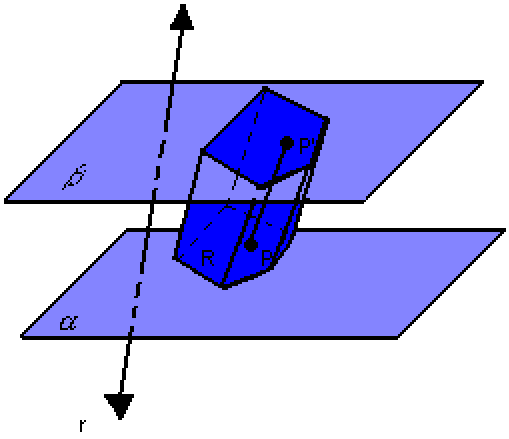
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo **R** contido em α e uma reta **r** que intercepta α e β, mas não **R**:



Para cada ponto **P** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$, paralelo à reta **r** $(P' \in \beta)$**:**



Assim, temos:

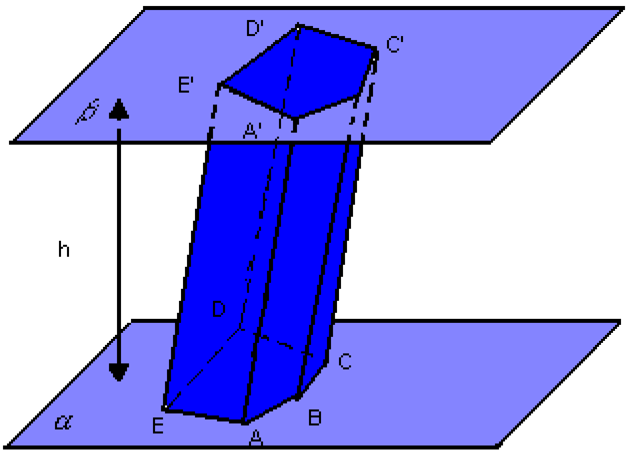


Chamamos de prisma ou prisma limitado o conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{PP'}$ paralelos a **r**.

Geometria Espacial

Elementos do prisma

Dados o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:



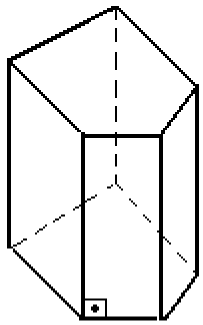
- bases:as regiões poligonais **R** e **S**
- altura:a distância **h** entre os planos α e β
- arestas das bases:os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$ (dos polígonos)
- arestas laterais:os segmentos $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$
- faces laterais: os paralelogramos AA'BB', BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A

Classificação

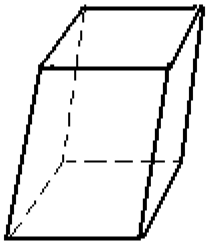
Um prisma pode ser:

- reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;
- oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Veja:

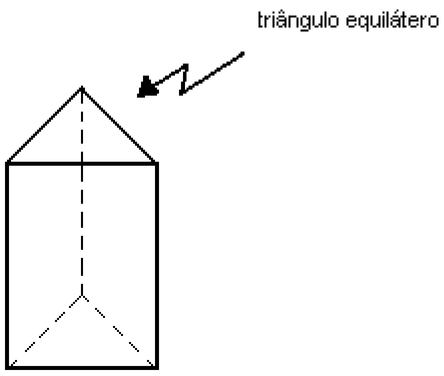


prisma reto

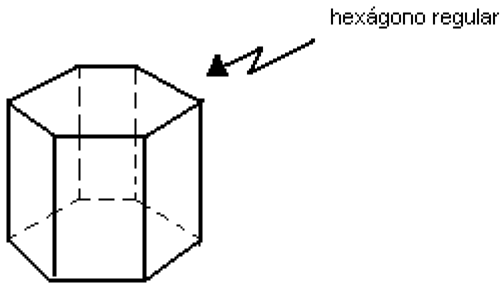


prisma oblíquo

Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares:



prisma regular triangular



prisma regular hexagonal

Observação: As faces de um prisma regular são retângulos congruentes

Geometria Espacial

Secção

Um plano que intercepte todas as arestas de um prisma determina nele uma região chamada secção do prisma.

Secção transversal é uma região determinada pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases (figura 1). Todas as secções transversais são congruentes (figura 2).

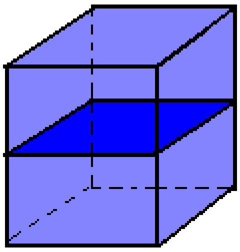


figura 1

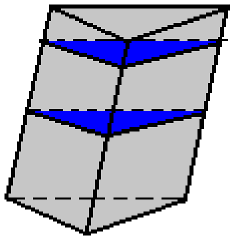


figura 2

Áreas

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície:as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área de uma face (**A_F**):área de um dos paralelogramos que constituem as faces;

b) área lateral (**A_L**):soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma.

No prisma regular, temos:

$$A_L = n \cdot A_F \text{ (n = número de lados do polígono da base)}$$

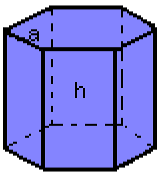
c) área da base (**A_B**): área de um dos polígonos das bases;

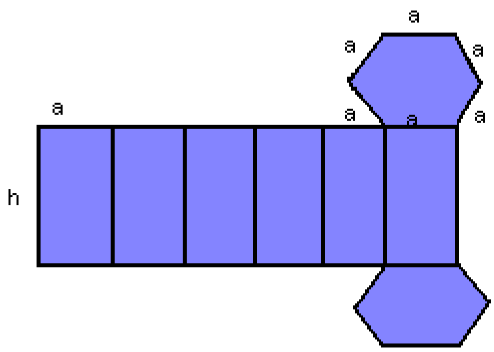
d) área total (**A_T**): soma da área lateral com a área das bases

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Vejamos um exemplo.

Dado um prisma hexagonal regular de aresta da base **a** e aresta lateral **h**, temos:





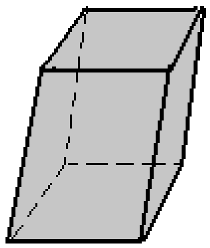
$$A_F = ah$$
$$A_L = 6ah$$
$$A_B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad (\text{área do hexágono regular})$$

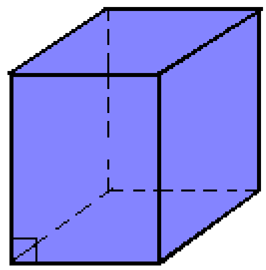
Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo.Assim, podemos ter:

b) paralelepípedo reto

a) paralelepípedo oblíquo



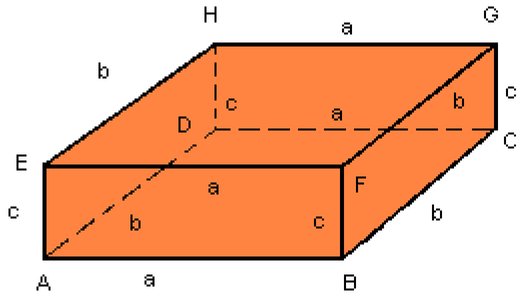


Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo *reto-retângulo,ortoedro ou paralelepípedo retângulo.*

Geometria Espacial

Paralelepípedo retângulo

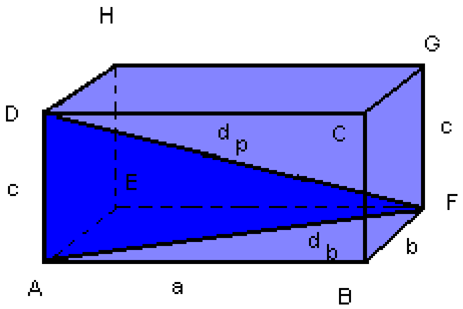
Seja o paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura:



Temos quatro arestas de medida **a**, quatro arestas de medida **b** e quatro arestas de medida **c**; as arestas indicadas pela mesma letra são paralelas.

Diagonais da base e do paralelepípedo

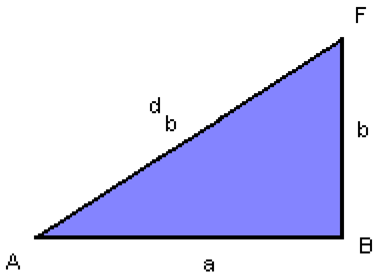
Considere a figura a seguir:



d_b = diagonal da base

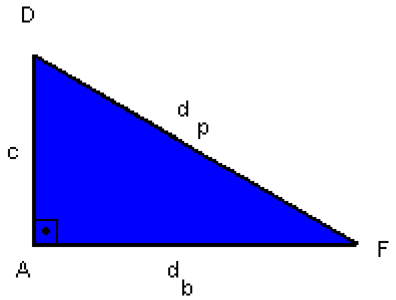
d_p = diagonal do paralelepípedo

Na base ABFE, temos:



$$d_b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

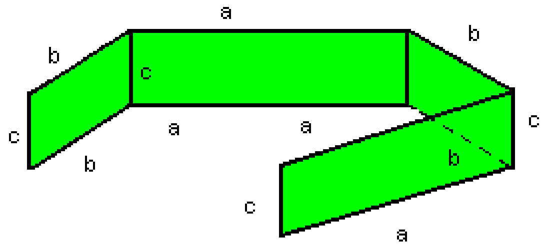
No triângulo AFD, temos:



$$d_p^2 = d_b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Área lateral

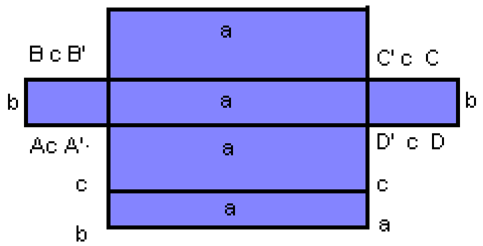
Sendo $\mathbf{A_L}$ a área lateral de um paralelepípedo retângulo, temos:



$$A_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = A_L = 2(ac + bc)$$

Área total

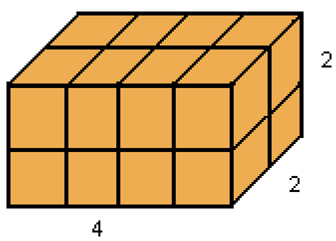
Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:



$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

Volume

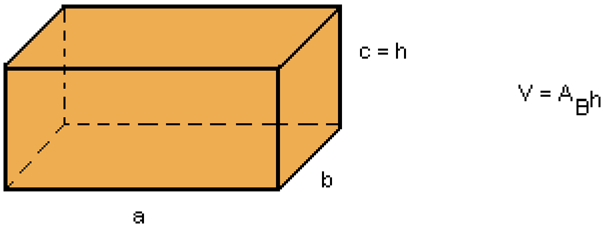
Por definição, unidade de volume é um cubo de aresta 1. Assim, considerando um paralelepípedo de dimensões 4, 2 e 2, podemos decompô-lo em 4 . 2 . 2 cubos de aresta 1:



Então, o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** é dado por:

$$V = abc$$

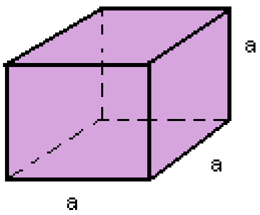
Como o produto de duas dimensões resulta sempre na área de uma face e como qualquer face pode ser considerada como base, podemos dizer que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto da área da base **A_B** pela medida da altura **h:**



Geometria Espacial

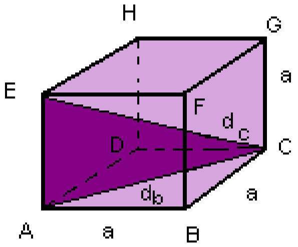
Cubo

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes (a= b = c) recebe o nome de cubo. Dessa forma, as seis faces são quadrados.



Diagonais da base e do cubo

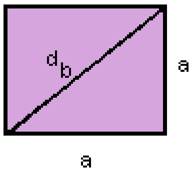
Considere a figura a seguir:



d_c=diagonal do cubo

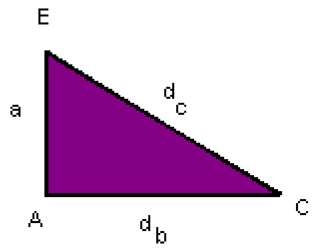
d_b = diagonal da base

Na base ABCD, temos:



$$d_b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

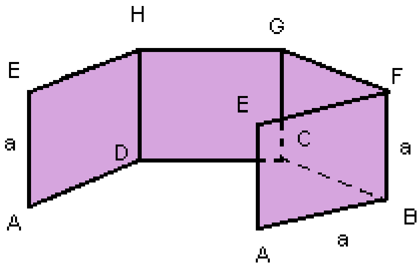
No triângulo ACE, temos:



$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

Área lateral

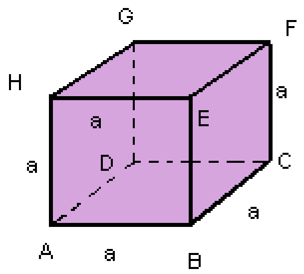
A área lateral $\mathbf{A_L}$ é dada pela área dos quadrados de lado **a**:



$$\boxed{A_L = 4a^2}$$

Área total

A área total $\mathbf{A_T}$ é dada pela área dos seis quadrados de lado **a**:



$$\boxed{A_T = 6a^2}$$

Volume

De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta **a** é dado por:

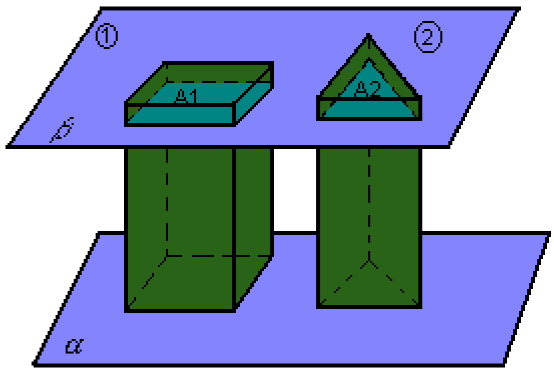
$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Geometria Espacial

Generalização do volume de um prisma

Para obter o volume de um prisma, vamos usar o princípio de Cavalieri (matemático italiano, 1598 - 1697), que generaliza o conceito de volume para sólidos diversos.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo a α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



$$\alpha // \beta \text{ e } A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

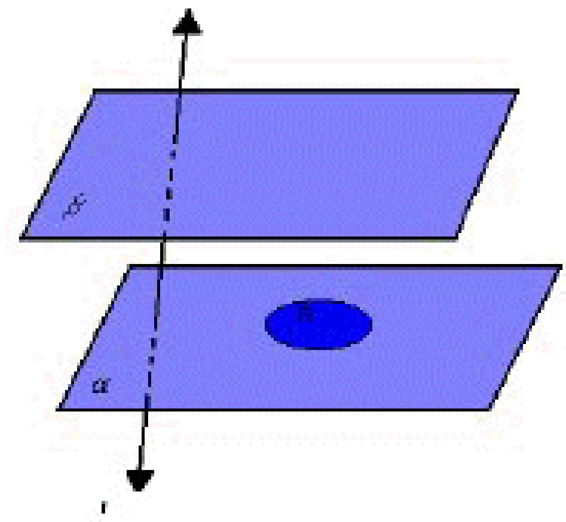
Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo prisma e de todo paralelepípedo é o produto da área da base pela medida da altura:

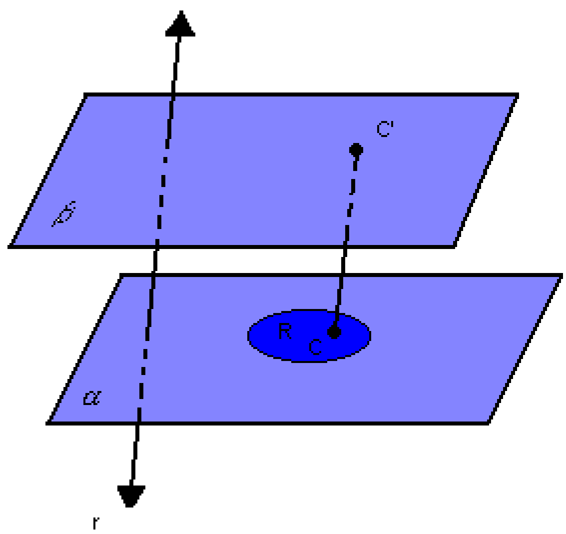
$$\boxed{V_{prisma} = A_B h}$$

Cilindro

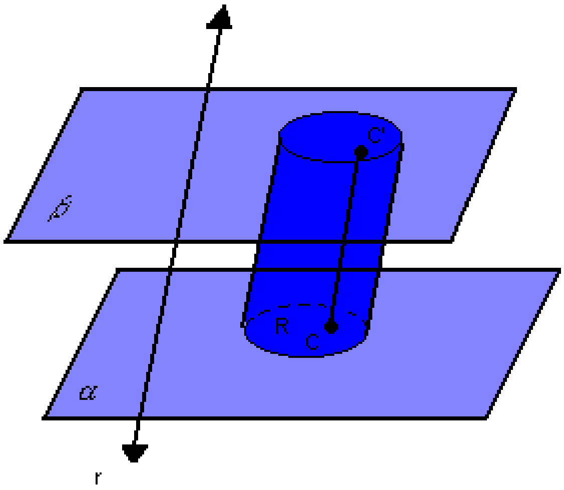
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um círculo **R** contido em α e uma reta **r** que intercepta α e β, mas não **R**:



Para cada ponto **C** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{CC'}$, paralelo à reta **r** $(C' \in \beta)$:



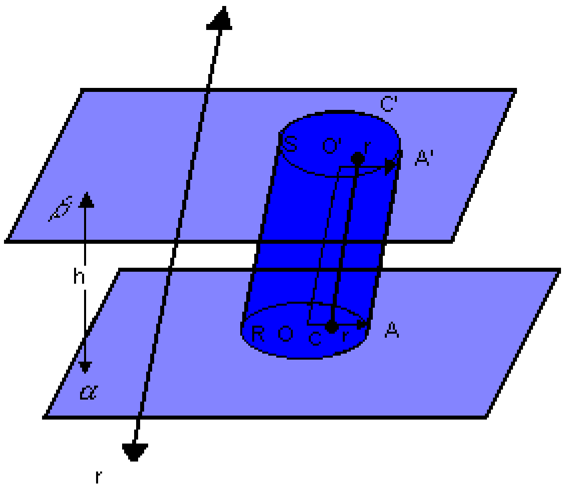
Assim, temos:



Chamamos de *cilindro*, *ou cilindro circular*, o conjunto de todos os segmentos $\overline{CC'}$ congruentes e paralelos a **r**.

Elementos do cilindro

Dado o cilindro a seguir, consideramos os seguintes elementos:



- bases: os círculos de centro **O** e **O'**e raios **r**
- altura: a distância **h** entre os planos α e β
- geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta **r**

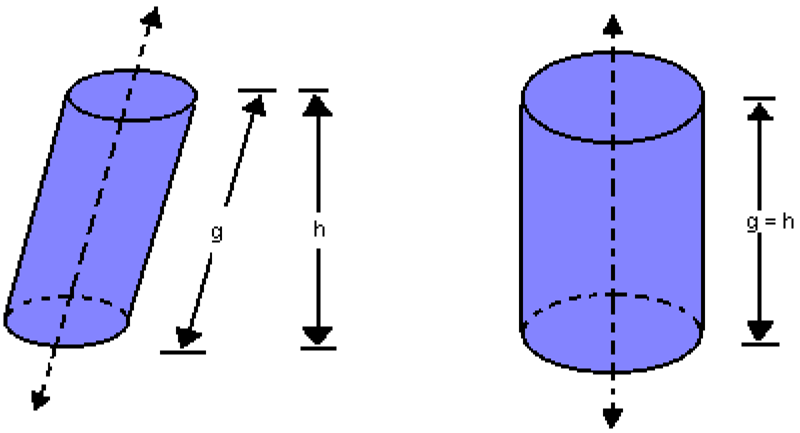
Geometria Espacial

Classificação do Cilindro

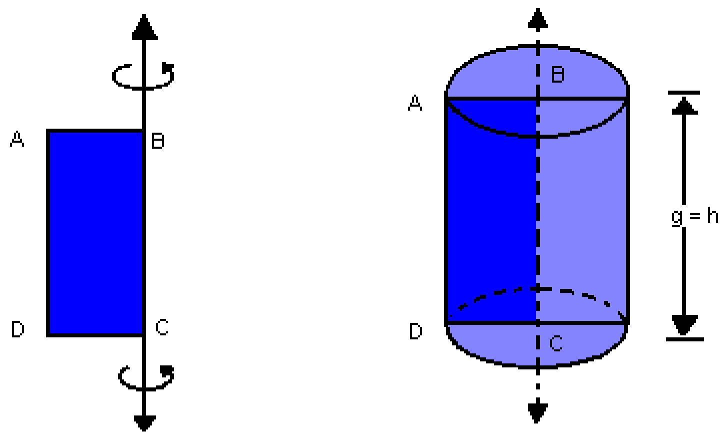
Um cilindro pode ser:

- circular oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases;
- circular reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases.

Veja:



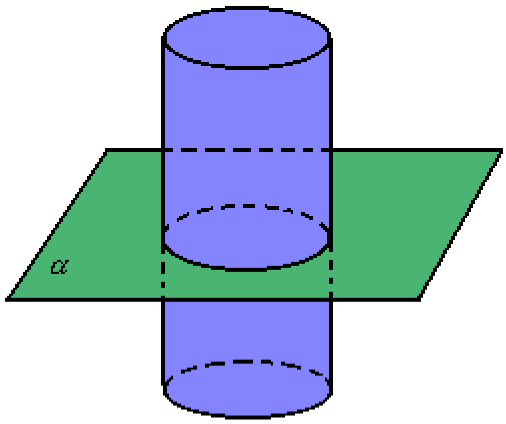
O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, por ser gerado pela rotação completa de um retângulo por um de seus lados. Assim, a rotação do retângulo ABCD pelo lado $\overline{BC}$ gera o cilindro a seguir:



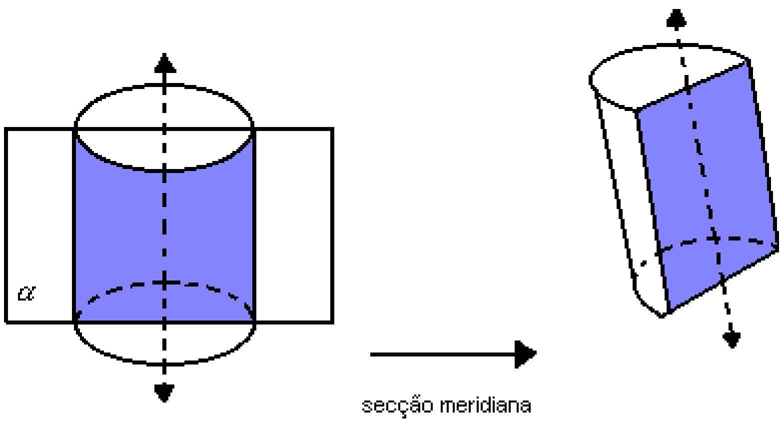
A reta $\overline{BC}$ contém os centros das bases e é o eixo do cilindro.

Secção

Secção transversal é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases. Todas as secções transversais são congruentes.



Secção meridiana é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo.



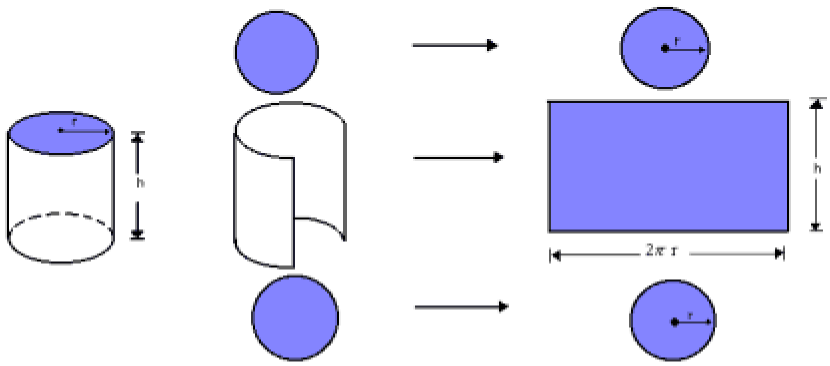
Geometria Espacial

Áreas

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

a) área lateral ($\mathbf{A_L}$)

Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é **h** e cujos raios dos círculos das bases são **r** é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h:

$$A_L = 2\pi r h$$

b) área da base ($\mathbf{A_B}$):área do círculo de raio **r**

$$A_B = \pi r^2$$

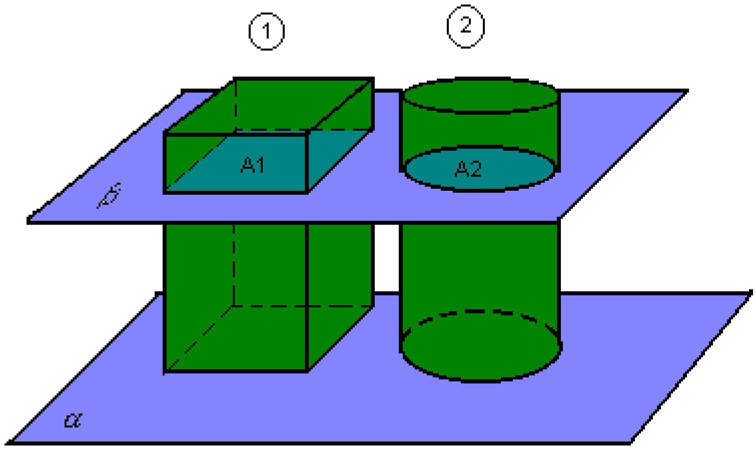
c) área total ($\mathbf{A_T}$): soma da área lateral com as áreas das bases

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Volume

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o princípio de Cavalieri.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo ao plano α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



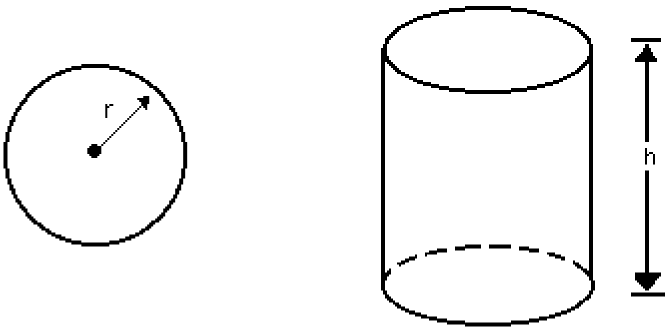
$\alpha // \beta$ e $A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$$\boxed{V_{cilindro} = A_B h}$$

No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio **r** $A_B = \pi r^2$; portanto seu volume é:

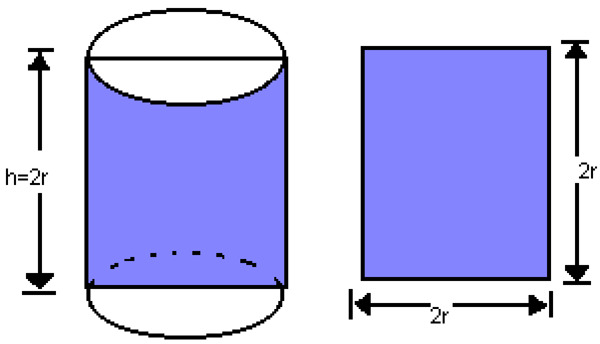


$$V = \pi r^2 h$$

Geometria Espacial

Cilindro eqüilátero

Todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado *cilindro eqüilátero*.

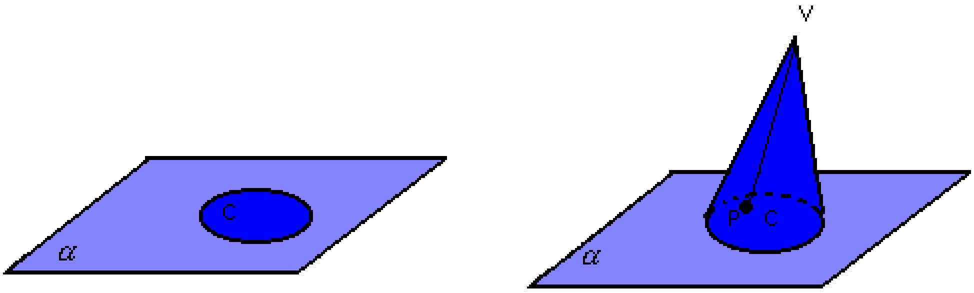


$$A_L = 2r.2\pi r = 4\pi r^2$$
$$A_T = A_L + A_B = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

:

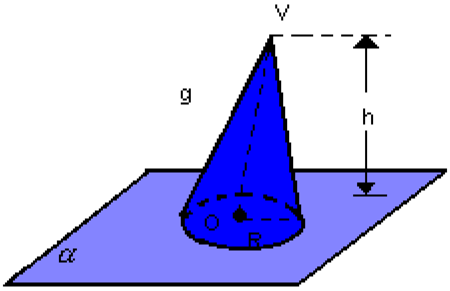
Cone circular

Dado um círculo **C**, contido num plano α, e um ponto **V** (*vértice*) fora de α, chamamos de *cone circular* o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}, P \in C$.



Elementos do cone circular

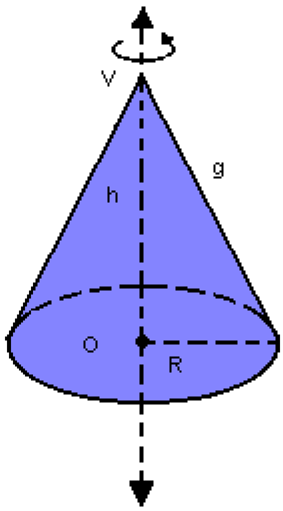
Dado o cone a seguir, consideramos os seguintes elementos:



- altura: distância **h** do vértice **V** ao plano α
- geratriz (**g**):segmento com uma extremidade no ponto **V** e outra num ponto da circunferência
- raio da base: raio **R** do círculo
- eixo de rotação:reta $\overleftrightarrow{VO}$ determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone

Cone reto

Todo cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado *cone reto*, também denominado *cone de revolução*. Ele pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

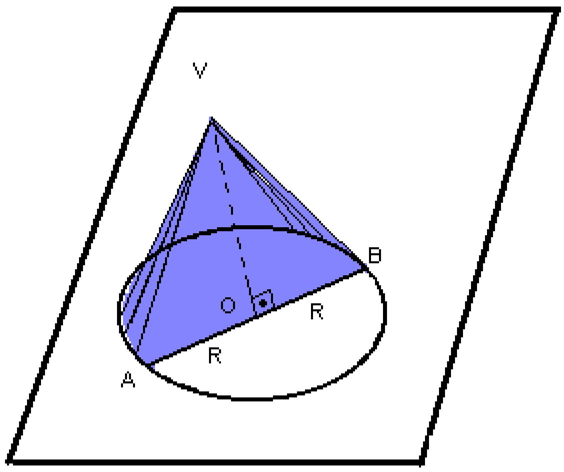


Da figura, e pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:

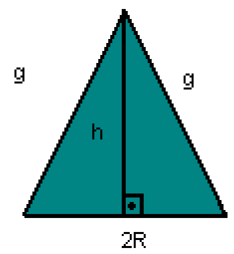
$$\boxed{g_2 = h_2 + R_2}$$

Secção meridiana

A secção determinada, num cone de revolução, por um plano que contém o eixo de rotação é chamada *secção meridiana*.



Se o triângulo AVB for eqüilátero, o cone também será eqüilátero:

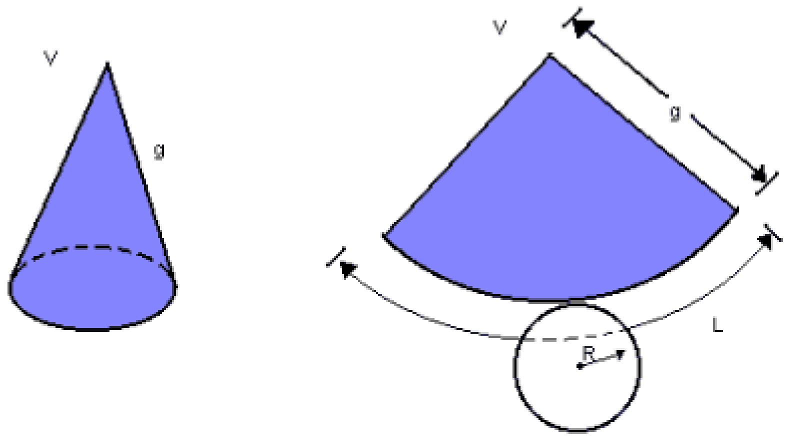


$$g = 2R$$
$$h = R\sqrt{3}$$

Geometria Espacial

Áreas

Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto, obtemos um setor circular de raio **g** e comprimento $l = 2\pi R$:



Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área lateral (**A$_L$**): área do setor circular

$$A_L = \frac{gl}{2} = \frac{g.2\pi R}{2} \Rightarrow A_L = \pi Rg$$

b) área da base (**A_B**):área do circulo do raio **R**

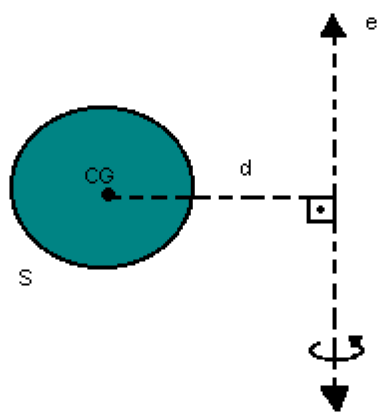
$$A_B = \pi R^2$$

c) área total (**A_T**):soma da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B = \pi \mathrm{Rg} + \pi \mathrm{R}^2 \Rightarrow A_T = \pi R(g + R)$$

Volume

Para determinar o volume do cone, vamos ver como calcular volumes de sólidos de revolução. Observe a figura:



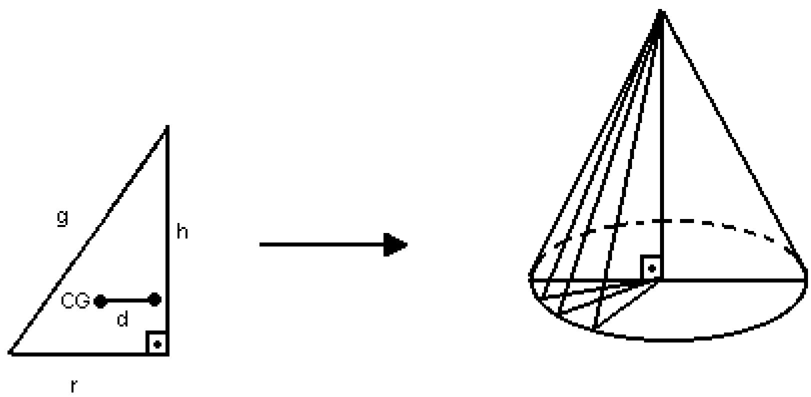
d = distância do centro de gravidade (CG) da sua superfície ao eixo **e**

S=área da superfície

Sabemos, pelo Teorema de Pappus - Guldin, que, quando uma superfície gira em torno de um eixo e, gera um volume tal que:

$$V = 2\pi \, \mathrm{dS}$$

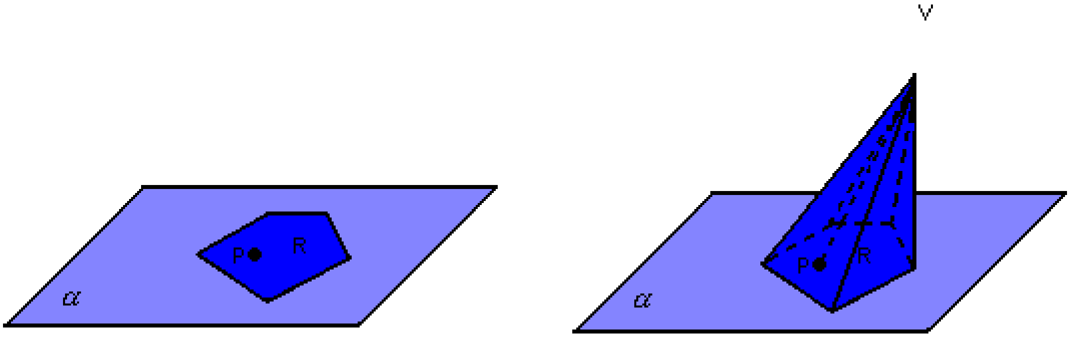
Vamos, então, determinar o volume do cone de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno do cateto **h**:



O CG do triângulo está a uma distância $d = \frac{r}{3}$ do eixo de rotação. Logo:

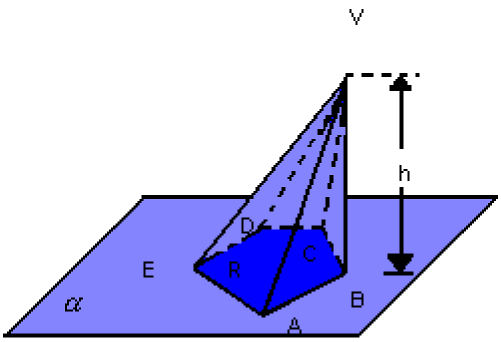
$$V_{cone} = 2\pi d S = 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Dados um polígono convexo **R**, contido em um plano α, e um ponto **V** (vértice) fora de α, chamamos de *pirâmide* o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}, P \in R$.



Elementos da pirâmide

Dada a pirâmide a seguir, temos os seguintes elementos:



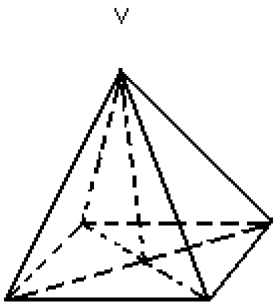
- base: o polígono convexo **R**
- arestas da base: os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$ do polígono
- arestas laterais: os segmentos $\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{VC}, \overline{VD}, \overline{VE}$
- faces laterais: os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEA
- altura: distância **h** do ponto **V** ao plano

Classificação

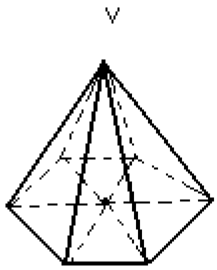
Uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base.

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de *pirâmide regular.* Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Veja:



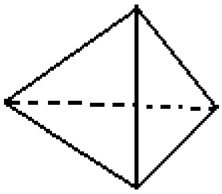
pirâmide regular quadrangular

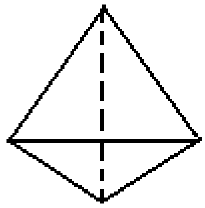


pirâmide regular hexagonal

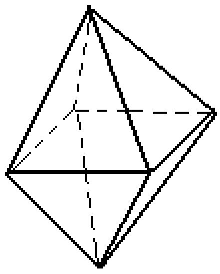
Observações:

1ª) Toda pirâmide triangular recebe o nome do tetraedro. Quando o tetraedro possui como faces triângulos eqüiláteros, ele é denominado regular (todas as faces e todas as arestas são congruentes).

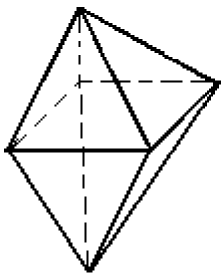

tetraedro


tetraedro regular

2ª) A reunião, base com base, de duas pirâmides regulares de bases quadradas resulta num octaedro. Quando as faces das pirâmides são triângulos eqüiláteros, o octaedro é regular.



octaedro



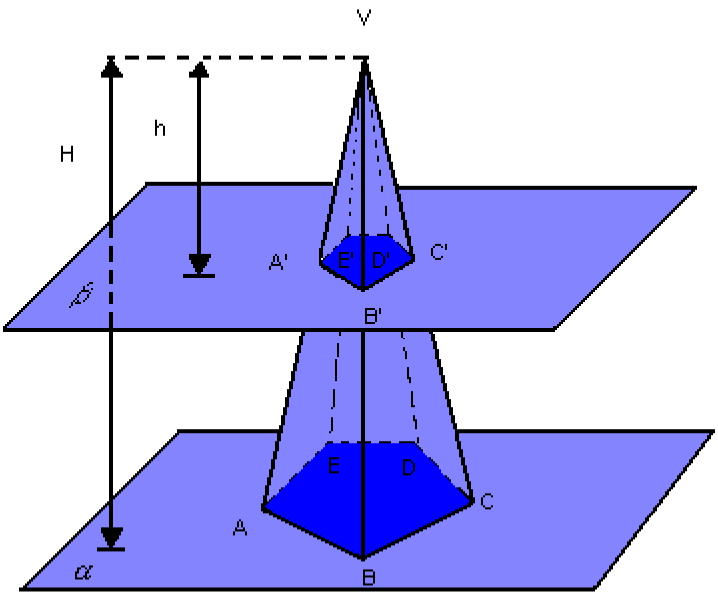
octaedro regular

Geometria Espacial

Secção paralela à base de uma pirâmide

Um plano paralelo à base que intercepte todas as arestas laterais determina uma secção poligonal de modo que:

- as arestas laterais e a altura sejam divididas na mesma razão;
- a secção obtida e a base sejam polígonos semelhantes;
- as áreas desses polígonos estejam entre si assim como os quadrados de suas distâncias ao vértice.

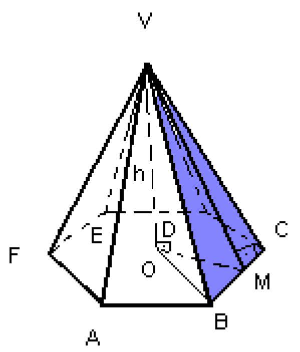


$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{VE'}{VE} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{\text{área } A'B'C'D'E'}{\text{área } ABCDE} = \frac{h^2}{H^2}$$

Relações entre os elementos de uma pirâmide regular

Vamos considerar uma pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral **l** e aresta da base **a**:

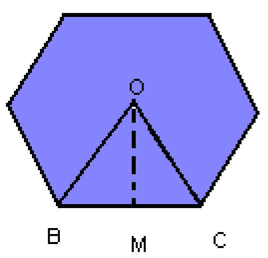


$$MC = \frac{a}{2}$$

$$h^2 = l^2 - a^2$$

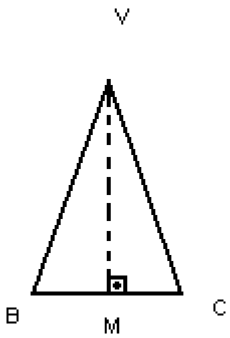
Assim, temos:

- A base da pirâmide é um polígono regular inscritível em um círculo de raio OB = R.



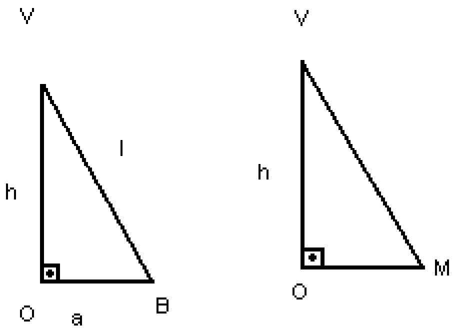
$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (apótema da base)}$$

- A face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles.



$\overline{VM}$ é o apótema da pirâmide (altura de uma face lateral)

- Os triângulos VOB e VOM são retângulos.



Áreas

Numa pirâmide, temos as seguintes áreas:

a) área lateral ($\mathbf{A_L}$): reunião das áreas das faces laterais

b) área da base ($\mathbf{A_B}$): área do polígono convexo (base da pirâmide)

c) área total ($\mathbf{A_T}$): união da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B$$

Para uma pirâmide regular, temos:

$$A_L = n.\frac{bg}{2} \qquad A_B = pa$$

em que:

$$\begin{cases} b \text{ é a aresta} \\ g \text{ é o apótema} \\ n \text{ é o número de arestas laterais} \\ p \text{ é o semiperímetro da base} \\ a \text{ é o apótema do polígono da base} \end{cases}$$

Volume

O princípio de Cavalieri assegura que um cone e uma pirâmide equivalentes possuem volumes iguais:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{área da base}} h \rightarrow \boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\cdot A_B h}$$

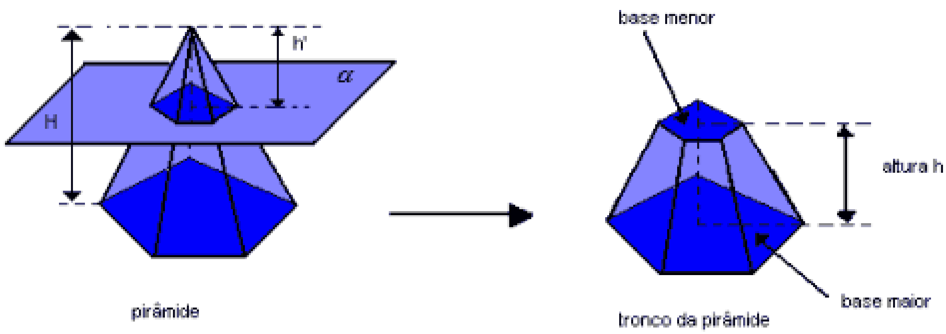
Troncos

Se um plano interceptar todas as arestas de uma pirâmide ou de um cone, paralelamente às suas bases, o plano dividirá cada um desses sólidos em dois outros: uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide; e um novo cone e um tronco de cone.

Vamos estudar os troncos.

Tronco da pirâmide

Dado o tronco de pirâmide regular a seguir, temos:



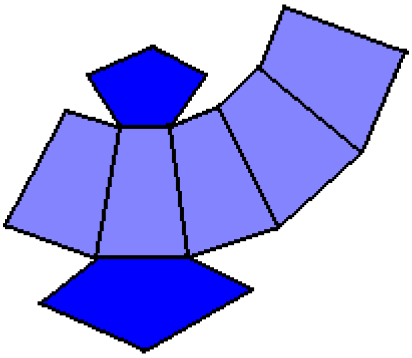
- as bases são polígonos regulares paralelos e semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles congruentes.

Áreas

Temos as seguintes áreas:

a) área lateral (**A_L**): soma das áreas dos trapézios isósceles congruentes que formam as faces laterais

b) área total (**A_T**): soma da área lateral com a soma das áreas da base menor **(A_b)** e maior **(A_B)**



$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

Volume

O volume de um tronco de pirâmide regular é dado por:

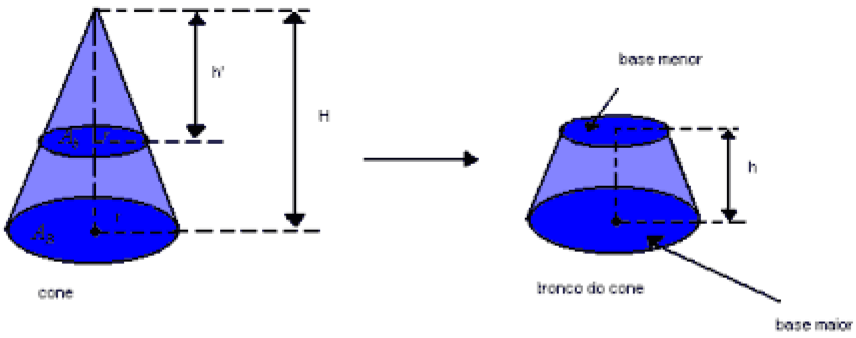
$$V_T = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)$$

Sendo V o volume da pirâmide e V' o volume da pirâmide obtido pela secção é válida a relação:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{H}\right)^3$$

Tronco do cone

Sendo o tronco do cone circular regular a seguir, temos:

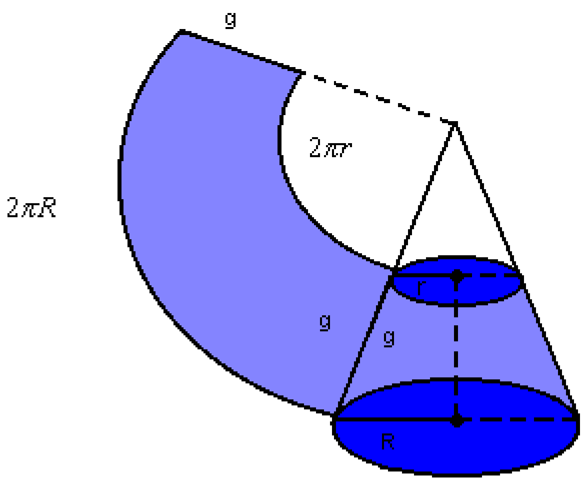


- as bases maior e menor são paralelas;
- a altura do tronco é dada pela distância entre os planos que contém as bases.

Áreas

Temos:

a) área lateral



$$\boxed{A_L = \pi(R + r)g}$$

b) área total

$$A_T = A_L + A_B + A_b = \pi(R + r)g + \pi R^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_T = \pi[(R + r)g + R^2 + r^2]$$

Volume

$$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2}) \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

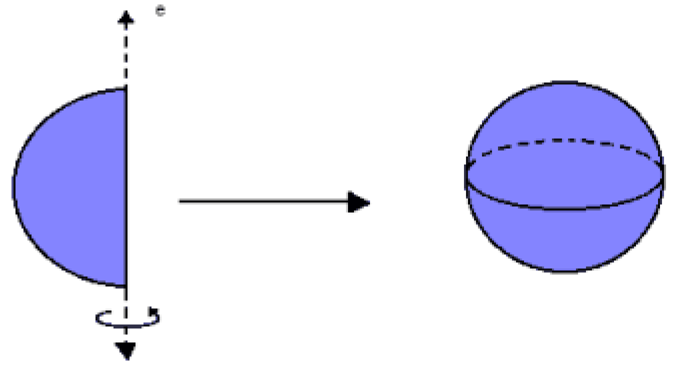
Sendo V o volume do cone e V' o volume do cone obtido pela secção são válidas as relações:

$$\frac{r}{r'} = \frac{H}{h'} \qquad \frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h'}\right)^2 \qquad \frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h'}\right)^3$$

Esfera

Chamamos de *esfera* de centro **O** e raio **R** o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio **R**.

Considerando a rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo **e**, a esfera é o sólido gerado por essa rotação. Assim, ela é limitada por uma superfície esférica e formada por todos os pontos pertencentes a essa superfície e ao seu interior.



Volume

O volume da esfera de raio **R** é dado por:

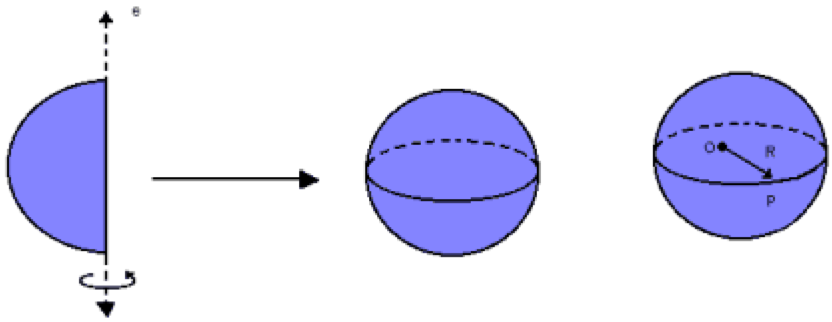
$$V_e = \frac{4}{3}.\pi R^3$$

Partes da esfera

Superfície esférica

A superfície esférica de centro **O** e raio **R** é o conjunto de pontos do es[aço cuja distância ao ponto O é igual ao raio **R**.

Se considerarmos a rotação completa de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro, a superfície esférica é o resultado dessa rotação.

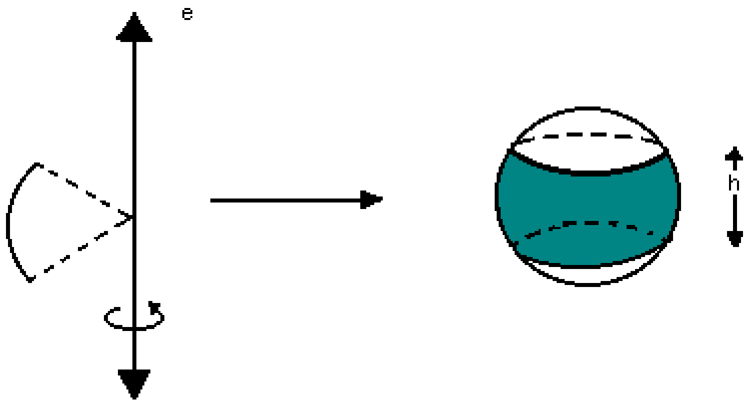


A área da superfície esférica é dada por:

$$\boxed{A_S = 4\pi R^2}$$

Zona esférica

É a parte da esfera gerada do seguinte modo:

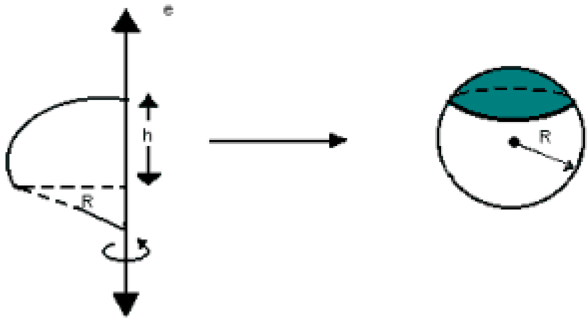


A área da zona esférica é dada por:

$$\boxed{S = 2\pi R h}$$

Calota esférica

É a parte da esfera gerada do seguinte modo:

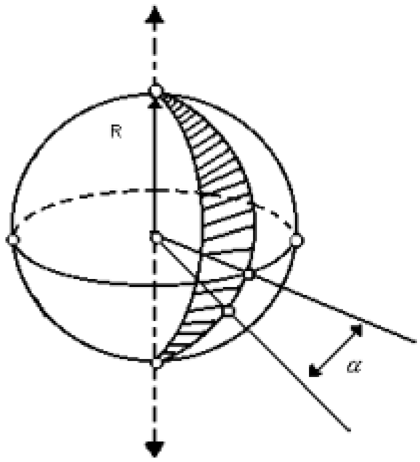


Ä área da calota esférica é dada por:

$$\boxed{S = 2\pi Rh}$$

Fuso esférico

O fuso esférico é uma parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semi-circunferência de um ângulo $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$ em torno de seu eixo:



A área do fuso esférico pode ser obtida por uma regra de três simples:

$A_S - 2\pi \qquad A_F = \dfrac{4\pi R^2\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_F = 2R^2\alpha$ (α em radianos)

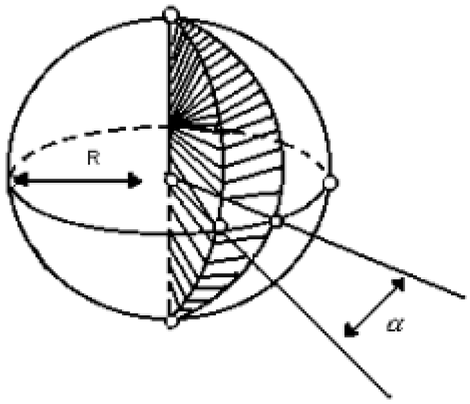
$A_F - \alpha$

$A_S = 360° \qquad A_F = \dfrac{4\pi R^2\alpha}{360°} \Rightarrow A_F = \dfrac{\pi R^2\alpha}{90°}$ (α em graus)

$A_F = \alpha$

Cunha esférica

Parte da esfera que se obtém ao girar um semicírculo em torno de seu eixo de um ângulo $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$:



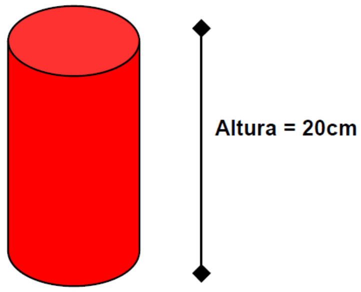
O volume da cunha pode ser obtido por uma regra de três simples:

$$\left.\begin{matrix} V_e & -2\pi \\ V_c & -\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_c = \frac{\frac{4}{3}.\pi R^3 \alpha}{2\pi} \Rightarrow V_c = \frac{2}{3}.R^3 \alpha \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

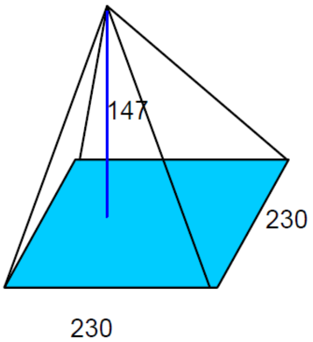
$$\left.\begin{matrix} V_e & - & 360^\circ \\ V_c & - & \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_c = \frac{\frac{4}{3}.\pi R^3 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow Vc = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

Exercícios

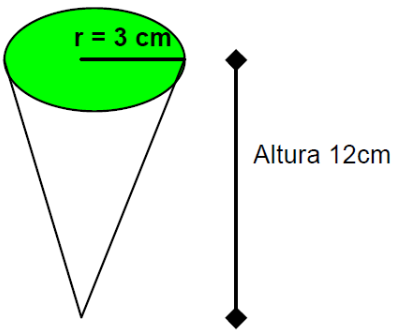
1. (UFMG) Achar a área total da superfície de um cilindro reto, sabendo que o raio da base é de 10 cm e a altura é de 20 cm.



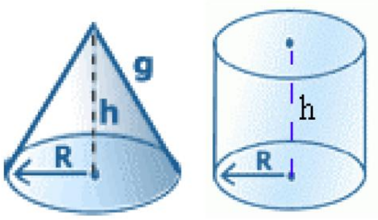
2. A pirâmide de Quéops, conhecida como a Grande Pirâmide, tem cerca de 230m de aresta na base e altura aproximada de 147m. Qual é o seu volume?



3. A casquinha de um sorvete tem a forma de um cone reto. Sabendo que o raio da base mede 3 cm e a altura é de 12 cm. Qual é o volume da casquinha?



4. Um líquido que está num recipiente em forma de cone será despejado em outro recipiente que possui forma cilíndrica. Se o raio da base dos dois recipientes for 25 cm e a altura dos dois for 1m, que altura atingirá o líquido no cilindro?



5. Uma pirâmide tem a altura medindo 30 cm e área da base igual a 150 cm². Qual é a área da secção superior do tronco desta pirâmide, obtido pelo corte desta pirâmide por um plano paralelo à base da mesma, sabendo-se que a altura do tronco da pirâmide é 17 cm?