A origem de i ao quadrado igual a -1

No estudo dos números complexos deparamo-nos com a seguinte igualdade: $i^2 = -1$.

A justificativa para essa igualdade está geralmente associada à resolução de equações do 2º grau com raízes quadradas negativas, o que é um erro. A origem da expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, outro assunto que também gera muita dúvida. Vamos compreender o motivo de tal igualdade e como ela surge.

Primeiro, faremos algumas definições.

1. Um par ordenado de números reais (x, y) é chamado de número complexo.
2. Os números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
3. A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , \ y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1*x_2 - y_1*y_2 , \ x_1*y_2 + y_1*x_2)$

Exemplo 1. Considere $z_1 = (3, 4)$ e $z_2 = (2, 5)$, calcule $z_1 + z_2$ e z_1*z_2.
Solução:
$z_1 + z_2 = (3, 4) + (2, 5) = (3+2, 4+5) = (5, 9)$
$z_1*z_2 = (3, 4)*(2, 5) = (3*2 - 4*5, 3*5 + 4*2) = (-14, 23)$

Utilizando a terceira definição fica fácil mostrar que:
$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
$(x_1 , 0)*(x_2, 0) = (x_1*x_2, 0)$

Essas igualdades mostram que no que diz respeito às operações de adição e multiplicação, os números complexos (x, y) se comportam como números reais. Nesse contexto, podemos estabelecer a seguinte relação: (x, 0) = x.

Usando essa relação e o símbolo i para representar o número complexo (0, 1), podemos escrever qualquer número complexo (x, y) da seguinte forma:

$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)*(y, 0) = x + iy \rightarrow$ que é a chamada de forma normal de um número complexo.

Assim, o número complexo (3, 4) na forma normal fica 3 + 4i.

Exemplo 2. Escreva os seguintes números complexos na forma normal.

a) (5, – 3) = 5 – 3i
b) (– 7, 11) = – 7 + 11i
c) (2, 0) = 2 + 0i = 2
d) (0, 2) = 0 + 2i = 2i

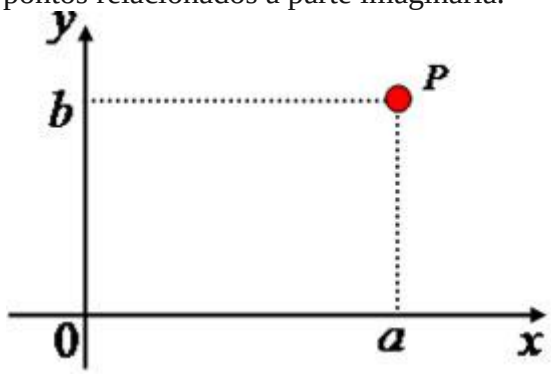
Agora, observe que chamamos de i o número complexo (0, 1). Vejamos o que ocorre ao fazer i2.
Sabemos que i = (0, 1) e que $i^2 = i*i$. Segue que:

$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1)$
Utilizando a definição 3, teremos:
$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 – 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 – 1, 0 + 0) = (– 1, 0)$

Como vimos anteriormente, todo número complexo da forma (x, 0) = x. Assim,
$i^2 = i*i = (0, 1)*(0, 1) = (0*0 – 1*1, 0*1 + 1*0) = (0 – 1, 0 + 0) = (– 1, 0) = – 1.$
Chegamos à famosa igualdade $i^2 = – 1$.

Forma algébrica

Os números complexos são formados por um par ordenado (a, b) onde os valores de a estão situados no eixo x (abscissa) e os valores de b no eixo y (ordenadas). Sobre o eixo x marcamos os pontos relacionados à parte real do número complexo e sobre o eixo y os pontos relacionados à parte imaginária.



Sendo P o ponto de coordenadas (a, b), a forma algébrica pela qual representaremos um número complexo será **a + bi**, como a e b Є R.
A forma algébrica de representar um número complexo é mais prática e mais utilizada nos cálculos.

Definindo as partes que formam um número complexo **z = a + bi**.

z é um número complexo qualquer.
a é a parte real do número complexo z.
b é a parte imaginária do número complexo z.

O conjunto dos números que formam a parte real é representado por Re (z).
O conjunto dos números que formam a parte imaginária é representado por Im (z).

Veja alguns exemplos de como identificar a parte real e a parte imaginária de um número complexo:

z = - 3 + 5i
Re(z) = -3
Im(z) = 5

z = -5 + 10i
Re(z) = -5
Im(z) = 10

z = 1/2 + (1/3)i

Re(z) = 1/2
Im(z) = 1/3

As coordenadas ***a*** e ***b*** podem assumir qualquer valor real, dependendo do valor que eles assumirem o número complexo irá receber um nome diferente:
Quando a e b forem diferentes de zero dizemos que o número complexo é imaginário:
z = 2 + 5i

Quando o valor de a é igual a zero e o de b é diferente de zero dizemos que o número complexo é imaginário puro:
z = 0 + 2i
z = 2i

Quando a diferente de zero e b igual a zero dizemos que o número complexo será real.
z = 5 – 0i
z = 5

Exemplos:

Determine o valor de k para que z =(k-6) + 7i, seja:

Número Real
Para que o complexo seja um número real devemos fazer b = 0 e a ≠ 0.
k – 6 ≠ 0
então: k ≠ 6

Imaginário puro
Para que um número complexo seja imaginário puro a = 0 e b ≠ 0, então podemos dizer que:
k – 6 = 0
então: k = 6

Oposto, conjugado e igualdade de números complexos

Para determinarmos o oposto, o conjugado e a igualdade de qualquer número complexo precisamos conhecer alguns fundamentos.

Oposto

O oposto de qualquer número real é o seu simétrico, o oposto de 10 é -10, o oposto de -5 é +5. O oposto de um número complexo respeita essa mesma condição, pois o oposto do número complexo z será – z.

Por exemplo: Dado o número complexo z = 8 – 6i, o seu oposto será:
- z = - 8 + 6i.

Conjugado

Para determinarmos o conjugado de um número complexo, basta representar o número complexo através do oposto da parte imaginária. O conjugado de z = a + bi será:

$$\bar{z} = a - bi$$

Exemplo:
z = 5 – 9i, o seu conjugado será:

z = – 2 – 7i, o seu conjugado será

Igualdade

Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição:
Partes imaginárias iguais
Partes reais iguais

Dado os números complexos z1 = a + bi e z2 = d + ei, z1 e z2, serão iguais se, somente se, a = d e bi = ei.

Observações:

A soma de números complexos opostos será sempre igual a zero.
z + (-z) = 0.

O conjugado de um número complexo será o próprio número complexo.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

Não existe relação de ordem no conjunto dos números complexos, então não podemos estabelecer quem é maior ou menor.

Exemplo 1

Dado o número complexo z = - 2 + 6i, calcule o seu oposto, o seu conjugado e o oposto do conjugado.

Oposto
- z = 2 - 6i

Conjugado

$$\bar{z} = -2 - 6i$$

Oposto do conjugado

$$\bar{z} = -2 - 6i$$
$$-\bar{z} = 2 + 6i$$

Exemplo 2

Determine a e b de modo que $-2+9i=\overline{a+bi}$.

Precisamos estabelecer a propriedade da relação de igualdade entre eles. Então:

a = - 2
b = 9

Conjunto dos números complexos

Os números naturais surgiram da necessidade do homem de relacionar objetos a quantidades, os elementos que pertencem a esse conjunto são:
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}, o zero surgiu posteriormente, com a finalidade de expressar algo nulo no preenchimento posicional.

O conjunto dos números naturais surgiu simplesmente com o propósito da contagem, no comércio sua utilização esbarrava nas situações em que era preciso expressar prejuízos. Os matemáticos da época, no intuito de resolver tal situação, criaram o conjunto dos números inteiros, simbolizado pela letra Z.
Z = {... , -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4, ... }
Operações comerciais representando lucros ou prejuízos podiam ser calculadas, por exemplo:
20 – 25 = – 5 (prejuízo)
–10 + 30 = 20 (lucro)
–100 + 70 = – 30 (prejuízo)

Com a evolução dos cálculos, o conjunto dos números inteiros não estava satisfazendo algumas operações, assim foi estipulado um novo conjunto numérico: o conjunto dos números racionais. Esse conjunto consiste na união entre o conjunto dos números naturais com os números inteiros mais os numerais que podem ser escritos na forma de fração ou números decimais.

Q = { ... , -5; ...; - 4,7; ... ; - 2; ... ; -1;...; 0; ...; 2,65; ...; 4; ... }

Alguns números decimais não podem ser escritos na forma de fração, dessa forma não pertencem ao conjunto dos racionais, eles formam o conjunto dos números irracionais. Este conjunto possui números importantes para a Matemática, como o número pi (~3,14) e o número de ouro (~1,6).

A união dos conjuntos dos números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais formam o conjunto dos números Reais.

A criação do conjunto dos números Reais se deu ao longo de todo o processo de evolução da Matemática, atendendo às necessidades da sociedade. Na busca por novas descobertas, os matemáticos esbarraram em uma situação oriunda da resolução de uma

equação do 2º grau. Vamos resolver a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$ aplicando o Teorema de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*1*5}}{2*1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Note que ao desenvolver o teorema nos deparamos com a raiz quadrada de um número negativo, sendo impossível a resolução dentro do conjunto dos números Reais, pois não existe número negativo que elevado ao quadrado tenha como resultado número negativo. A resolução destas raízes só foi possível com a criação e adequação dos números complexos, por Leonhard Euler. Os números Complexos são representados pela letra C e mais conhecidos como o número da letra i, sendo designada nesse conjunto a seguinte fundamentação: $i^2 = -1$.
Esses estudos levaram os matemáticos ao cálculo das raízes de números negativos, pois com a utilização do termo $i^2 = -1$, também conhecido como número imaginário, é possível extrair a raiz quadrada de números negativos. Observe o processo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1*16} = \sqrt{-1*4^2} = \sqrt{-1} * \sqrt{4^2}$$

Temos:

$$\sqrt{-1} = i$$

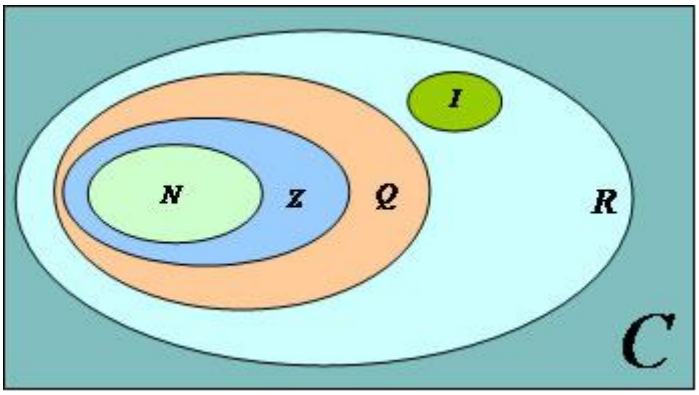
$$\sqrt{4^2} = 4$$

Então:

$$\sqrt{-16} = 4i$$

Os números Complexos constituem o maior conjunto numérico existente.

N: conjunto dos números Naturais
Z: conjunto dos números Inteiros
Q: conjunto dos números Racionais
I: conjunto dos números Irracionais
R: conjunto dos números Reais
C: conjunto dos números Complexos



Adição, subtração e multiplicação de número complexo

Os números complexos são escritos na sua forma algébrica da seguinte forma: a + bi, sabemos que a e b são números reais e que o valor de a é a parte real do número complexo e que o valor de bi é a parte imaginária do número complexo.

Podemos então dizer que um número complexo z será igual a a + bi (z = a + bi).

Com esses números podemos efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação, obedecendo à ordem e características da parte real e parte imaginária.

Adição

Dado dois números complexos quaisquer z1 = a + bi e z2 = c + di, ao adicionarmos teremos:

z1 + z2
(a + bi) + (c + di)

a + bi + c + di

a + c + bi + di

a + c + (b + d)i

(a + c) + (b + d)i

Portanto, z1 + z2 = (a + c) + (b + d)i.

Exemplo:
Dado dois números complexos z1 = 6 + 5i e z2 = 2 – i, calcule a sua soma:

(6 + 5i) + (2 – i)
6 + 5i + 2 – i
6 + 2 + 5i – i
8 + (5 – 1)i
8 + 4i

Portanto, z1 + z2 = 8 + 4i.

Subtração

Dado dois números complexos quaisquer z1 = a + bi e z2 = c + di, ao subtraímos teremos:

z1 - z2
(a + bi) - (c + di)

a + bi – c – di

a – c + bi – di

(a – c) + (b – d)i

Portanto, z1 - z2 = (a - c) + (b - d)i.

Exemplo:
Dado dois números complexos z1 = 4 + 5i e z2 = -1 + 3i, calcule a sua subtração:

(4 + 5i) – (-1 + 3i)
4 + 5i + 1 – 3i
4 + 1 + 5i – 3i
5 + (5 – 3)i
5 + 2i

Portanto, z1 - z2 = 5 + 2i.

Multiplicação

Dado dois números complexos quaisquer z1 = a + bi e z2 = c + di, ao multiplicarmos teremos:

z1 . z2
(a + bi) . (c + di)

ac + adi + bci + bdi2
ac + adi + bci + bd (-1)
ac + adi + bci – bd
ac - bd + adi + bci
(ac - bd) + (ad + bc)i

Portanto, z1 . z2 = (ac + bd) + (ad + bc)I.

Exemplo:

Dado dois números complexos z1 = 5 + i e z2 = 2 - i, calcule a sua multiplicação:

(5 + i) . (2 - i)
$5 . 2 – 5i + 2i – i^2$
10 – 5i + 2i + 1
10 + 1 – 5i + 2i
11 – 3i

Portanto, z1 . z2 = 11 – 3i.

Divisão de números complexos

Ao dividirmos dois números complexos devemos escrevê-los em forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, veja como:

Dado dois números complexos z_1 e z_2, para efetuarmos a divisão dos dois devemos seguir a seguinte regra:

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Exemplo:

$$\frac{z1}{z2} = \frac{3 + 2i}{4i}$$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{3+2i}{4i} \cdot \frac{(-4i)}{(-4i)} = \frac{-12i - 8i^2}{-16i^2} = \frac{-12i + 8}{16} = \frac{8}{16} - \frac{12i}{16} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{4}$$

Portanto, $z1 : z2 = \frac{1}{2} - \frac{3i}{4}$

Exemplo:

$$\frac{z1}{z2} = \frac{1+i}{1+2i}$$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{1 - 2i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{1 - i + 2}{1 + 4} = \frac{3 - i}{5}$$

Portanto, $z1 : z2 = \frac{3}{5} - \frac{i}{5}$

Exemplo:

$z1 = 2$
$z2 = -1 + i$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{2}{-1+i} \cdot \frac{(-1-i)}{(-1-i)} = \frac{-2-2i}{1-i^2} = \frac{-2-2i}{1+1} = \frac{-2-2i}{2}$$

Portanto, $z1 : z2 = -1 - i$

De uma forma geral podemos demonstrar a divisão de dois números complexos por:

Dado z1 = a + bi e z2 = c + di a divisão de z1 : z2 será:

$$\frac{z1}{z2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} =$$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{ac + bd + cbi - adi}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Portanto:

$$z1 : z2 = \frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Inverso de um número complexo

O inverso de um número é a troca do numerador pelo denominador e vice-versa, desde que essa fração ou número seja diferente de zero. Em um número complexo acontece da mesma forma: um número complexo para ter seu inverso é preciso ser não nulo, por exemplo:

Dado um número complexo qualquer não nulo z = a + bi, o seu inverso será representado por z^{-1}.

Veja o cálculo do inverso do número complexo z = 1 – 4i.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-4i} * \frac{1+4i}{1+4i} = \frac{1+4i}{1^2 - 16i^2} = \frac{1+4i}{1-16*(-1)} = \frac{1+4i}{1+16} = \frac{1+4i}{17}$$

Portanto, o inverso do número complexo z = 1 – 4i será:

$$z^{-1} = \frac{1+4i}{17}$$

Concluímos que o inverso de um número complexo não nulo terá a seguinte generalidade: ***z = a + bi***

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} * \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2 - b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2 - b^2*(-1)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Quando multiplicamos um número complexo pelo seu inverso o resultado será sempre igual a 1, $z * z^{-1} = 1$. Observe a multiplicação do complexo z = 1 – 4i pelo seu inverso:

$$z^{-1} = \frac{1+4i}{17}$$

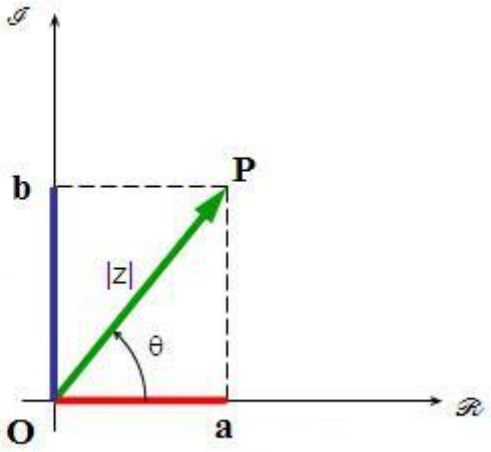
A multiplicação de números complexos ocorre da seguinte maneira:

(a+bi)*(c +di) = ac + adi + bci + bdi² = ac + (ad + bc)i + bd(–1) = ac + (ad + bc)i – bd = ***(ac – bd) + (ad + bc)i***

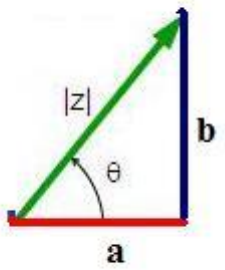
$$(1-4i)*\left(\frac{1+4i}{17}\right)=\frac{1^2-4^2i^2}{17}=\frac{1\ -16i^2}{17}=\frac{1-16*(-1)}{17}=\frac{1+16}{17}=\frac{17}{17}=1$$

Argumento de um número complexo

Os números complexos são uma extensão do conjunto dos números reais. Na verdade, número complexo é um par ordenado de números reais (a, b). Escrito na forma normal, o par ordenado (a, b) fica z = a + bi. Representando esse número complexo no plano de Argand-Gauss, teremos:



O segmento de reta OP é chamado de módulo do número complexo. O arco formado entre o eixo horizontal positivo e o segmento OP, no sentido anti-horário, é chamado de argumento de z. Observe a figura abaixo para determinarmos as características do argumento de z.



No triângulo retângulo formado, podemos afirmar que:

$$sen\ \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$\boldsymbol{\theta} = \arg(z)$

Podemos constatar, também, que:

$|z|^2 = a^2 + b^2$ (pelo teorema de Pitágoras)

Ou

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 1. Dado o número complexo z = 2 + 2i, determine o módulo e o argumento de z.

Solução: Pelo número complexo z = 2 + 2i, sabemos que a = 2 e b = 2. Segue que:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Com os valores de seno e cosseno percebemos que $\boldsymbol{\theta}$ é um arco notável, assim, podemos afirmar que $\boldsymbol{\theta} = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$.

Exemplo 2. Determine o argumento do número complexo z = – 3 – 4i.
Solução: Para determinar o argumento de z, precisamos conhecer o valor de |z|. Assim, como a = – 3 e b = – 4, teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$sen\ \theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{-4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

Nesse caso, $\boldsymbol{\theta}$ não é um ângulo notável. Dessa forma, precisamos determinar o valor da tangente de $\boldsymbol{\theta}$. Sabemos que:

$$tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta}$$

Assim,

$$tg\ \theta = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

Portanto, $\boldsymbol{\theta}$ é o arco cuja tangente é 4/3.

Nos casos em que o argumento não for um ângulo notável, é preciso determinar o valor de sua tangente, como feito no exemplo anterior, para só depois podermos afirmar quem é o argumento.

Exemplo 3. Dado o número complexo z = – 6i, determine o argumento de z.
Solução: Vamos calcular o valor do módulo de z.

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{0 + 36} = 6$$

Segue que:

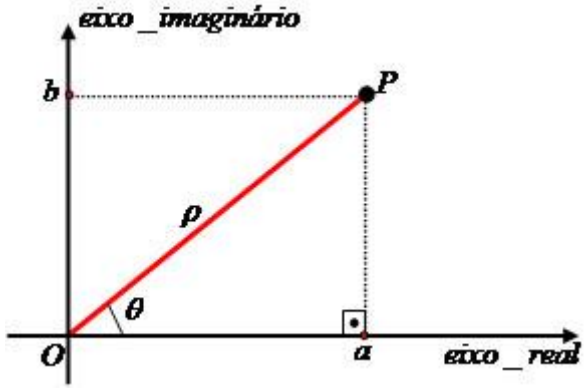
$$sen\ \theta = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\cos\theta = \frac{0}{6} = 0$$

De acordo com os valores de seno e cosseno, podemos afirmar que $\boldsymbol{\theta} = 270°$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

Plano de Argand-Gauss

A cada número complexo ***z = a + bi***, podemos associar um ponto P no plano cartesiano. No complexo podemos representar a parte real por um ponto no eixo real, e a parte imaginária por um ponto no eixo vertical, denominado eixo imaginário.
A este ponto P, correspondente ao complexo ***z = a +bi***, chamamos de imagem ou afixo de z. Observe a representação da interpretação geométrica dos números complexos:



Atualmente, o plano dos números complexos é conhecido como plano de Argand-Gauss.

Com base no plano representado vamos calcular a distância p (letra grega: rô), entre os pontos O e P. Observe que basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, dessa forma temos:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo de z é representado pela grandeza p, mas também pode ser representado por |z|.
A ângulo Θ ($0 \leq \Theta < 2\pi$), formado pelo eixo real e a reta do segmento OP, é chamado de argumento de z ($z \neq 0$) e é indicado por ***Arg(z)***. Baseado nessas definições podemos estabelecer as seguintes relações na interpretação geométrica dos complexos:

$$\theta = Arg(z)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$sen\theta = \frac{b}{\rho}$$

Exemplo
Calcule o módulo e o argumento do número complexo z = 1 + 2i.

Módulo
a = 1 e b = 2

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

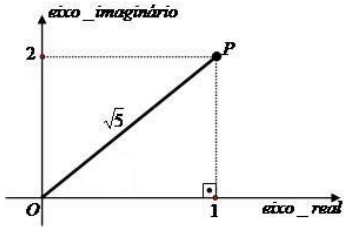
$$\rho = \sqrt{5}$$

Argumento
θ = Arg(z)

$$sen\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$tg\theta = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto, o argumento de z é o arco cuja tangente é 2.

Veja como ficaria o gráfico representativo do número complexo z = 1 + 2i.